

Zadanie 26.

$$x^2 + 8x + 15 > 0$$

Współczynniki: $a = 1$, $b = 8$, $c = 15$

Delta: $\Delta = 4$

Miejsca zerowe: $x_1 = -5$, $x_2 = -3$

Ramiona paraboli skierowane są w górę, więc: $x \in (-\infty, -5) \cup (-3, +\infty)$

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -5) \cup (-3, +\infty)$

Zadanie 27.

Z treści zadania wynika, że: $c > a$ oraz $c > b$.

Z tych nierówności wynika, że: $c - a > 0$ oraz $c - b > 0$.

Stąd otrzymujemy: $c - a + c - b > 0$.

To oznacza, że: $2c - a - b > 0$. /Wykonaliśmy redukcję wyrazów podobnych./

Stąd mamy: $\frac{2c-a-b}{6} > 0$. /Podzieliśmy obustronnie nierówność przez 6./

Z tego wynika, że: $\frac{2a+2b+2c-3a-3b}{6} > 0$. /Licznik ułamka zapisaaliśmy w innej (równoważnej) postaci./

Stąd wynika, że: $\frac{2a+2b+2c}{6} - \frac{3a+3b}{6} > 0$.

Stąd mamy: $\frac{a+b+c}{3} - \frac{a+b}{2} > 0$. /Skróciliśmy ułamki./

I ostatecznie: $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

Uwaga: Do tego rozwiązania dochodzi się rozpoczynając od ostatniego zapisanego wiersza.

Zadanie 28.

Przekształcamy wyrażenie po prawej stronie znaku równości $W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$:

Wylączamy przed nawias x^2 oraz -9 :

$$W(x) = x^2(x+4) - 9(x+4)$$

Wylączamy przed nawias $x+4$:

$$W(x) = (x+4)(x^2-9)$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia:

$$W(x) = (x+4)(x-3)(x+3)$$

Stąd odczytujemy, że pierwiastkami wielomianu są: -4 , 3 oraz -3 .

Poszukiwanym (trzecim) pierwiastkiem wielomianu jest więc -3 .

Odpowiedź: $x = -3$.

Zadanie 29.

Wyznaczamy równanie prostej AB :

Ma ona postać: $y = ax + b$

Podstawiając w tym równaniu w miejsce x i y współrzędne punktów A i B , otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2 = -2a + b \\ 10 = 2a + b \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb: $a = 2$ i $b = 6$.

Prosta AB ma więc postać: $y = 2x + 6$.

Znajdujemy teraz środek odcinka AB :

$$S = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+10}{2} \right), \text{ skąd } S = (0, 6).$$

Znajdujemy równanie prostej prostopadłej do prostej AB , przechodzącej przez punkt S :

Współczynnik kierunkowy a wynosi: $-\frac{1}{2}$.

Szukana prosta ma więc postać: $y = -\frac{1}{2}x + b$. Współczynnik b znajdujemy podstawiając w tym równaniu w miejsce x i y współrzędne punktu S

Otrzymujemy: $b = 6$.

Prosta, której szukamy ma równanie: $y = -\frac{1}{2}x + 6$

Odpowiedź: $y = -\frac{1}{2}x + 6$.

Zadanie 30.

Założmy, że $|\angle APB| \leq 90^\circ$.

Wtedy $|\angle BAP| + |\angle PBA| \geq 90^\circ$ (bo suma miar wszystkich kątów w trójkącie - w tym przypadku chodzi o trójkąt ABP - musi wynosić 180°).

Wtedy $2|\angle BAP| + 2|\angle PBA| \geq 180^\circ$.

To oznacza, że $|\angle BAC| + |\angle CBA| \geq 180^\circ$ (bo $2|\angle BAP| = |\angle BAC|$ i $2|\angle PBA| = |\angle CBA|$, gdyż dwusieczna dzieli kąt na dwa kąty o równych miarach).

To oznacza, że suma miar kątów trójkąta ABC jest większa od 180° , co jest sprzeczne z treścią twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie.

Oznacza to, że $|\angle APB| > 90^\circ$.

Zadanie 31.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (5, 7), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 7), \\ (7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 4), (7, 5), (7, 6), (7, 7)\}$$

$$A = \{(1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (7, 6)\}$$

W zbiorze A jest 17 elementów, w zbiorze Ω 49 elementów.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{17}{49}$.

Zadanie 32.

Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, więc $x = \frac{9+19}{2}$.

Mamy więc $x = 14$.

Ciąg $(14, 42, y, z)$ jest geometryczny (zastąpiliśmy x liczbą 14).

Wyznaczamy iloraz tego ciągu $q = \frac{42}{14}$. Stąd $q = 3$.

$$y = 42 \cdot q, \text{ więc } y = 126$$

$$z = 126 \cdot q, \text{ więc } z = 378$$

Odpowiedź: $x = 14, y = 126, z = 378$.

Zadanie 33.

Wyznaczamy pole podstawy ostrosłupa:

Podstawa jest kwadratem o przekątnej długości 4. Bok tego kwadratu jest więc równy $2\sqrt{2}$, a pole 8.

Wyznaczamy wysokość ostrosłupa:

Trójkąt CAE jest prostokątny (kąt CAE jest kątem prostym).

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \operatorname{tg} \angle ACE.$$

Stąd i z tego, że $|\angle ACE| = 60^\circ$, a $|AC| = 4$ mamy: $\frac{|AE|}{4} = \sqrt{3}$.

Wysokość ostrosłupa AE jest więc równa $4\sqrt{3}$.

Objętość ostrosłupa wynosi: $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3}$.

Odpowiedź: $V = \frac{32}{3}\sqrt{3}$.

Zadanie 34.

Oznaczmy:

v_p - średnia prędkość pociągu pospiesznego na trasie AB

v_o - średnia prędkość pociągu osobowego na trasie AB

t_p - czas przejazdu pociągu pospiesznego na trasie AB

t_o - czas przejazdu pociągu osobowego na trasie AB

Z treści zadania wynika, że: $v_o = v_p - 24$ oraz $t_o = t_p + 1$. (*)

Dodatkowo wiemy, że:

$$\begin{cases} v_p t_p = 210 \\ v_o t_o = 210 \end{cases}$$

Korzystając z zależności (*) otrzymujemy:

$$\begin{cases} v_p t_p = 210 \\ (v_p - 24)(t_p + 1) = 210 \end{cases}$$

Stąd otrzymamy ($t_p > 0$):

$$\begin{cases} v_p = \frac{210}{t_p} \\ v_p t_p + v_p - 24t_p - 24 = 210 \end{cases}$$

Po podstawieniu za v_p ułamka z pierwszego równania do drugiego i uproszczeniu otrzymamy:

$$-24t_p^2 - 24t_p + 210 = 0.$$

Dzieląc obustronnie przez -6 doprowadzamy to równanie do postaci:

$$4t_p^2 + 4t_p - 35 = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe o niewiadomej t_p .

Współczynniki: $a = 4$, $b = 4$, $c = -35$

Delta: $\Delta = 576$

Miejsca zerowe: $t_p = 2,5$, lub $t_p = -3,5$

Czas przejazdu jest wielkością dodatnią, więc $t_p = 2,5$

Odpowiedź: Czas przejazdu pociągu pospiesznego wynosi 2,5 godziny.